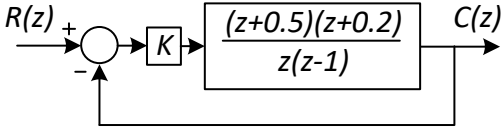


OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI

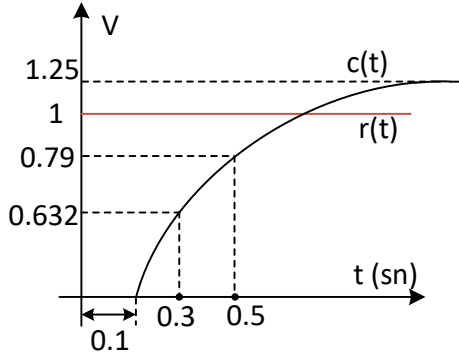
S1)



Yanda verilen kontrol sistemi için;

- Kök-yer eğrisini çizin. (kutuplar, sıfırlar, kutup-sıfır dağılımı, asimtotlar, kopma noktaları, varsa birim daireyi kesme noktalarını)
- Kopma noktalarındaki kazançları yer eğrisinden hesaplayınız.
- Jury kararlılık testine göre sistemin kararlılığını inceleyiniz.

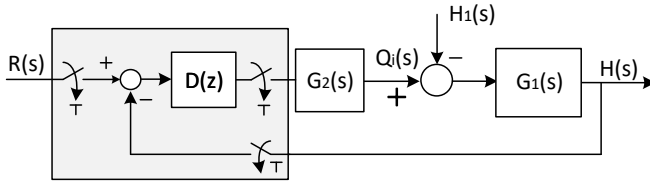
S2)



Açık çevrim cevabı yanda verilmiş olan ölü zaman sistem için;

- Açık çevrim transfer fonksiyonunu $\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$ yazınız.
- Örnekleme zamanı $T = 0.04sn$ için ZOH'lu ayırık zaman açık çevrim transfer fonksiyonu $G_{ZOH} G(z)$ elde ediniz.

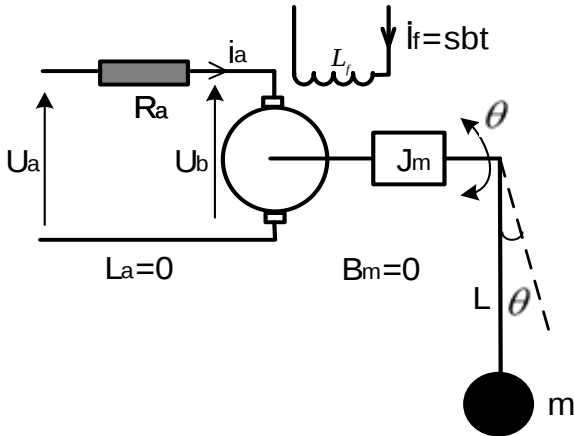
S3)



Şekilde verilen kontrol sisteminde,

- İki girişli sistem için $H(z)$ çıkış cevabını elde ediniz.
- $D(z)$ kontrolcüsünün hangi şart/şartlar altında $H(z) = R(z)$ sağlayabileceğini gösteriniz.

S4)



Şekilde verilen kontrol sisteminde motor miline L uzunluğunda esnek olmayan bir bağlantı ile sabitlenmiş kütle θ açısı ile sağa-sola döndürülmektedir.

- Sistemi tanımlayan denklemleri t-domeninde yazınız ve durum denklemlerini elde ediniz.

- Durum denklemlerini $\theta = 0$ civarında doğrusallaştırınız ve durum denklemlerini

$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = A^* \Delta x(t) + B^* \Delta u(t)$ vektör matris formunda yazınız

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, r_0} \quad B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial r_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial r_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial r_n} \end{bmatrix}_{x_0, r_0}$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-s_i)^m X(s) \frac{z}{z-e^{sT}} \right] \right\}$$

Başarılar, Süre 90 dk

Prof. Dr. Ayhan ÖZDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Zekiye ERDEM

CEVAPLAR

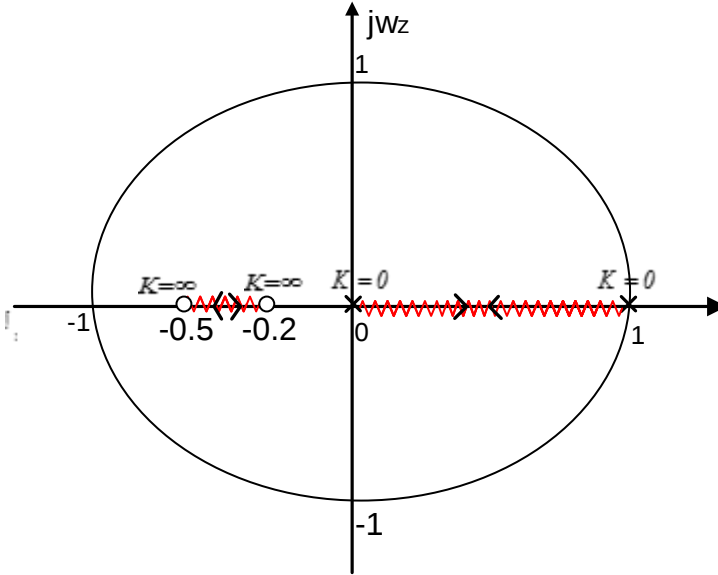
C1.a) Yer eğrisi çizim için açık-çevrim transfer fonksiyonu gereklidir. Verilen kapalı çevrim kontrol blok diyagramından,

1. $A.Ç.T.F. = \frac{K(z+0.5)(z+0.2)}{z(z-1)}$ olarak yazılır.

Açık çevrim transfer fonksiyonuna ait:

Kutuplar	Sıfırlar
$p_1 = 0$	$s_1 = -0.5$
$p_2 = 1$	$s_2 = -0.2$
-----	-----
$n = 2$ Kutup sayısı.	$m = 2$ Sıfır sayısı.

2. Kutup sıfır dağılımı



- ✓ İki Kutup arası kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet çıktı olarak kopma noktası olacaktır.
- ✓ İki Sıfır arası kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet girdi olarak kopma noktası olacaktır.

3. Asimtotlar

$n-m=0$, Kutup sayısı = Sıfır sayısı olduğundan kök-yer eğrisinin sonsuza giden kolu dolayısıyla asimtodu yoktur.

4. Kopma noktaları;

$\frac{dG(z)H(z)}{dz} = 0$ ifadesinden hesaplanır.

$\frac{d}{dz} \left(\frac{K(z^2 + 0.7z + 0.1)}{z^2 - z} \right) = 0$ dan

$$\Rightarrow K \left[\frac{(2z + 0.7)(z^2 - z) - (2z - 1)(z^2 + 0.7z + 0.1)}{(z^2 - z)^2} \right] = 0 \text{ dan}$$

$$1.7z^2 + 0.2z - 0.1 = 0 \rightarrow z_1 = -0.3084 \rightarrow \text{Girdi olarak kopma noktası}$$

$$z_2 = 0.1907 \rightarrow \text{Çıktı olarak kopma noktası}$$

- ✓ İki kutup arası kök-yer eğrisine dâhil olduğundan bir adet çıktı olarak kopma noktası olacaktır. Dâhil olan bölge göz önünde bulundurulduğunda (0 -1 noktaları arası taralı bölge), **Çıktı olarak kopma noktası=0.1907 noktasıdır.**
- ✓ İki sıfır arası kök-yer eğrisine dâhil olduğundan bir girdi olarak kopma noktası olacaktır. Dâhil olan bölge göz önünde bulundurulduğunda (-0.2 -0.5 noktaları arası taralı bölge); **Girdi olarak kopma noktası=-0.3084 noktasıdır.**

5. Birim daireyi kesme noktaları

Jury Kararlılık kriterinden karakteristik denklem:

$$F(z) = 1 + G(z)H(z) = 1 + \frac{K(z^2 + 0.7z + 0.1)}{z^2 - z} = 0 \Rightarrow F(z) = (1 + K)z^2 + z(0.7K - 1) + 0.1K = 0$$

Jury kararlılık kriteri ile sistemin kararlılık analizi için önce iki gerek koşula bakılmalıdır.

i) $F(1) > 0$ olmalıdır.

$$1 + K + 0.7K - 1 + 0.1K > 0 \quad K > 0 \text{ olmalıdır. (1. Gerek koşul)}$$

$$1.8K > 0$$

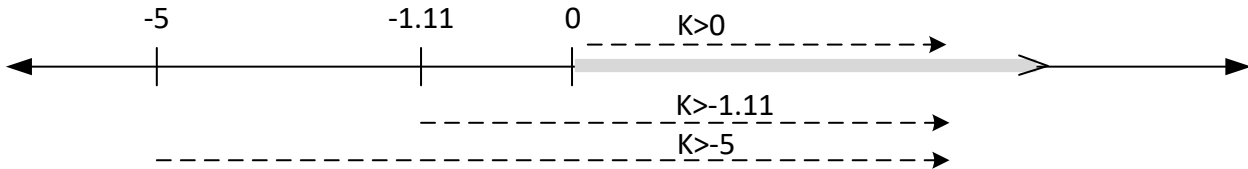
ii) $(-1)^2 F(-1) > 0$ olmalıdır.

$$1 + K - 0.7K + 1 + 0.1K > 0 \quad K > -5 \text{ olmalıdır. (2. Gerek koşul)}$$

$$0.4K > -2 \Rightarrow$$

Yeter koşul: $|a_n| > |a_0| \rightarrow |1 + K| > |0.1K| \rightarrow K > -1.11$ olmalıdır. (Yeter koşul)

Bu gerek ve yeter koşullar aşağıda şekilde gösterilmiştir. Her üç koşulun da sağlandığı bölge **K>0** gri alan olarak gösterilmiştir.



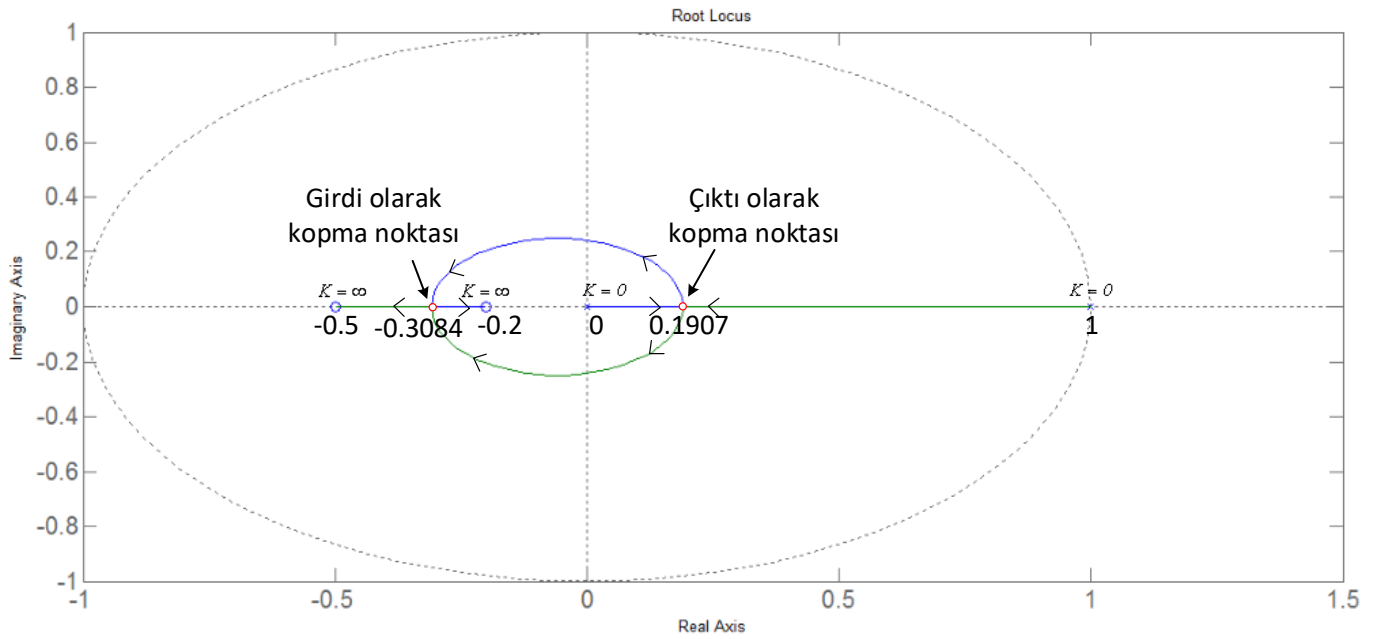
$K > 0$ için yani $-\infty < K > 0$ aralığı için sistem kararlıdır. Kapalı çevrim kutularının tümü birim daire içindedir.

Yer eğrisi birim daireyi kesmez. K nın sınır değeri YOKTUR.

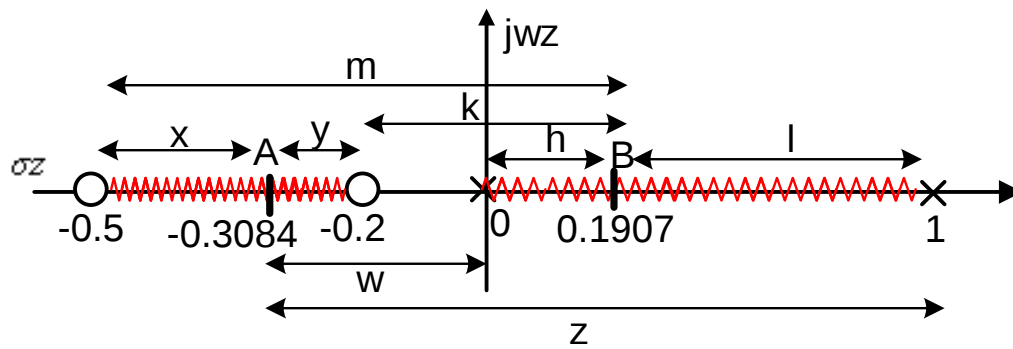
Kök-yer eğrisi çizdirmek için MATLAB kodları aşağıdadır:

```
num=[1 0.7 0.1];
den=[1 -1 0];
T=0.1
s=tf('z')
Gz=tf(num,den,T)
rlocus(Gz)
```

Tüm hesaplamalardan sonra incelenen sistem için kök-yer eğrisi aşağıda çizdirilmiştir.



b)Kopma noktalarındaki kazanç



$$K_A = \frac{\text{Kutupların } A - \text{noktasına uzaklıklarının çarpımı}}{\text{Sıfırların } A - \text{noktasına uzaklıklarının çarpımı}} = \frac{wz}{xy} = \frac{(0.3084 * (1 + 0.3084))}{(0.5 - 0.3084) * (0.3084 - 0.2)} = 19.4$$

$$K_B = \frac{\text{Kutupların } B - \text{noktasına uzaklıklarının çarpımı}}{\text{Sıfırların } B - \text{noktasına uzaklıklarının çarpımı}} = \frac{hl}{km} = \frac{(0.1907 * (1 - 0.1907))}{(0.5 + 0.1907) * (0.1907 + 0.2)} = 0.572$$

II. YOL: Kopma noktalarındaki kutuplar karakteristik denklemde yerine koyulur ise yukarıda elde edilen sonuçlar elde edilebilir.

$$F(z) = (1 + K)z^2 + z(0.7K - 1) + 0.1K$$

$$F(0.3084) = (1 + K_A)0.3084^2 + 0.3084(0.7K_A - 1) + 0.1K_A = 0$$

$$K_A = 19.4$$

$$F(0.1907) = (1 + K_B)0.1907^2 + 0.1907(0.7K_B - 1) + 0.1K_B = 0$$

$$K_B = 0.572$$

c) Jury Kararlılık kriterinin uygulanması: Kararlılık analizi için öncelikle karakteristik denklem yazılmalıdır.

$$F(z) = 1 + G(z)H(z) = 1 + \frac{K(z^2 + 0.7z + 0.1)}{z^2 - z} = 0 \Rightarrow F(z) = (1 + K)z^2 + z(0.7K - 1) + 0.1K = 0$$

Jury kararlılık kriteri ile sistemin kararlılık analizi için önce iki gerek koşula bakılmalıdır.

i) $F(1) > 0$ olmalıdır.

$$1 + K + 0.7K - 1 + 0.1K > 0$$

$$1.8K > 0$$

$K > 0$ olmalıdır. **(1. Gerek koşul)**

ii) $(-1)^2 F(-1) > 0$ olmalıdır.

$$1 + K - 0.7K + 1 + 0.1K > 0$$

$$0.4K > -2 \Rightarrow$$

olmalıdır.

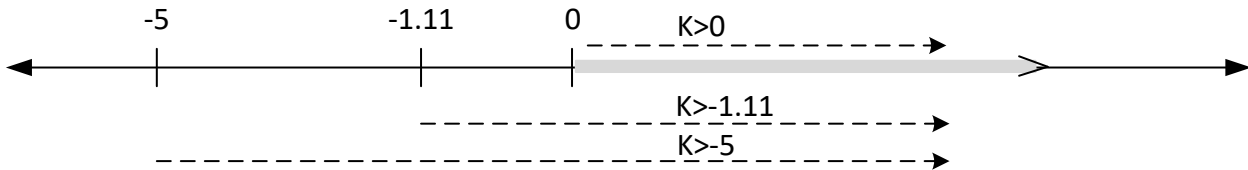
$$K > -5$$

(2. Gerek koşul)

Yeter koşul: $|a_n| > |a_0| \rightarrow |1 + K| > |0.1K| \rightarrow K > -1.11$ olmalıdır. **(Yeter koşul)**

$K > 0$ için yani bütün K değerleri için sistem kararlıdır.

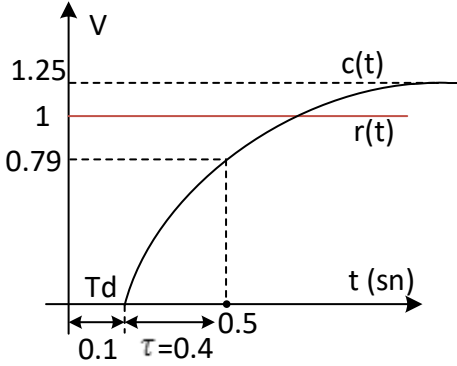
Bu gerek ve yeter koşullar aşağıda şekilde gösterilmiştir. Her üç koşulun da sağlandığı bölge $K > 0$ gri alan olarak gösterilmiştir.



$K > 0$ için yani $-\infty < K > 0$ aralığı için sistem kararlıdır.

C.2)

a)



Yukarıda açık çevrim cevabı görülen ölü zamanlı I.dereceden sisteme ait transfer fonksiyonu,

K =Kazanç, Zaman sabiti= τ ve T_d =ölü zaman olmak üzere ,

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-T_d s} \quad \text{formundadır.}$$

i- **Kazanç hesabı:** $K = \frac{\Delta c(t)}{\Delta r(t)} = \frac{c(\infty) - c(0)}{r(\infty) - r(0)} = \frac{1.25 - 0}{1 - 0} = 1.25$ olarak hesap edilir.

ii- **Zaman Sabiti:** Sistem cevabının son değerinin %63.2 sine varıncaya kadar geçen süredir. Cevap eğrisinden, $c_{0.632} = c(\infty) * 0.632 \rightarrow c_{0.632} = 1.25 * 0.632$

$c_{0.632} = 0.79$ dur. Cevap eğrisinden $c(t) = 0$ dan $c(t) = 0.79$ 'a varıncaya geçen süre,

$$\tau = 0.5 - 0.1 \rightarrow \tau = 0.4 \text{ sn} \quad \text{elde edilir.}$$

iii- **Ölü zaman:** Şekilden $T_d = 0.1 \text{ sn}$ dir.

Bulunan bu üç parametre değerleri yerlerine yazılır; $G(s) = \frac{1.25}{0.4s + 1} e^{-0.1s}$ olarak elde edilir.

b) Verilen sistem cevabında,

$T = 0.04 \text{ sn}$ örnekleme zamanı, $T_d = 0.1 \text{ sn}$ ölü zaman olarak verilmiştir.

$$n = \frac{T_d}{T} = \frac{0.1}{0.04} = 2.5 \quad \text{Örnekleme zamanı, ölü zamanın tam katı olmadığı görülmektedir,}$$

Bundan dolayı değiştirilmiş (modifiye edilmiş) z-dönüşümü kullanılmak zorundadır. Doğrudan z-dönüşümü uygulanamaz.

ZOH'lu açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G_{ZOH}G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right\} \quad \text{olarak yazılır.}$$

$$G_{ZOH}G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1.25 e^{-0.1s}}{0.4s + 1} \right\}_{T=0.04} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{3.125 e^{-0.1s}}{(s + 2.5)} \frac{1}{s} \right\}_{T=0.04} \quad \text{ve düzenlenir.}$$

Örnekleme zamanı ile ölü zaman arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir;

$$e^{-0.1s} = e^{-T_d s}$$

$$T = 0.04 \text{ sn} \quad \text{örnekleme zamanı}$$

$$T_d = 0.1 \text{ sn} \quad \text{ölü zaman}$$

$T_d = 2T + 0.5T$ olduğundan Örnekleme zamanı, ölü zamanın tam katı olmadığı görülmektedir. Bu nedenle modifiye-z dönüşümü aşağıdaki şekilde uygulanacaktır.

$$e^{-0.1s} = e^{-T_d s} = e^{-2sT} e^{-0.5sT}$$

şeklinde düzenlenir ise,

$$e^{-2sT} = z^{-2}$$

Modifiye-z dönüşümü için

$\mu = 0.5 \rightarrow m = 1 - 0.5 \rightarrow m = 0.5$ dönüşümü yapılmalıdır. Buradan $G_{ZOH}G(z)$ transfer fonksiyonunda $e^{-T_d s}$ yerine $e^{-T_d s} = e^{-2sT} e^{-0.5sT}$ koyulduğunda,

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125 Z \left\{ \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) \left(\frac{e^{-2sT} e^{-0.5sT}}{s + 2.5} \right) \right\}_{T=0.04 \text{ sn}} \rightarrow e^{-sT} = z^{-1} \rightarrow e^{-2sT} = z^{-2}$$

Şekilde düzenlenip $\mu = 0.5 \rightarrow m = 1 - 0.5 \rightarrow m = 0.5$ dönüşümü yapılarak denklemde yerine koyulduğunda,

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125 (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{e^{-2sT} e^{-0.1sT}}{s(s + 2.5)} \right\} = 3.125 (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left\{ \frac{e^{-(1-0.5)sT}}{s(s + 2.5)} \right\} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125 (1 - z^{-1}) z^{-2} z^{-1} Z \left\{ \frac{e^{0.5sT}}{s(s + 2.5)} \right\} = 3.125 \frac{z-1}{z} \frac{1}{z^2} z^{-1} Z \left\{ \frac{e^{0.5sT}}{s(s + 2.5)} \right\}$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s - s_i)^m X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \right\} \quad \text{z-dönüşümüne ait rezidü teoremi kullanılarak,}$$

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125 \frac{z-1}{z^4} \left\{ \cancel{\left. \frac{e^{0.5sT}}{s(s+2.5)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right|_{s=0}} + \cancel{(s+2.5)} \left. \frac{e^{0.5sT}}{s(s+2.5)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right|_{s=-2.5} \right\}_{T=0.04}$$

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125 \frac{z-1}{z^4} \left\{ \frac{z}{2.5(z-1)} - \frac{e^{-1.25T} z}{2.5(z-e^{-2.5T})} \right\} \Big|_{T=0.04}$$

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125 \frac{z-1}{z^4} \left\{ \frac{z}{2.5(z-1)} - \frac{0.9512z}{2.5(z-0.9048)} \right\}$$

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125 \left\{ \frac{1}{2.5z^3} - \frac{0.3805(z-1)}{z^3(z-0.9048)} \right\}$$

$$G_{ZOH}G(z) = \frac{1.25}{z^3} - \frac{1.1891(z-1)}{z^3(z-0.9048)}$$

$$G_{ZOH}G(z) = \frac{1.25(z-0.9048) - 1.1891z + 1.1891}{z^3(z-0.9048)}$$

Ara işlemler yapıldıktan ve düzenlendikten sonra,

$$G_{ZOH}G(z) = \frac{0.061z - 0.058}{z^3(z-0.9048)}$$

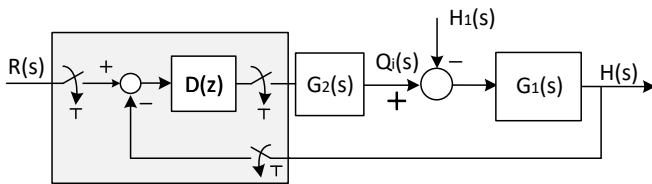
şeklinde yazılabilir.

Çözüm için MATLAB kodları aşağıdadır:

`Gs = tf(1.25, [0.4 1], 'iodelay', 0.1); %transfer fonksiyon`

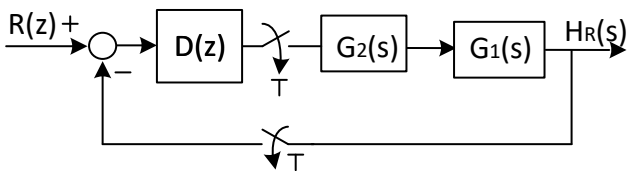
`Gz = c2d(Gs, 0.04) % zoh'lu G(z) hesabı`

C.3) a)



Şekilde verilen kontrol sistemi iki-giriş tek çıkışlı bir sistemdir. Lineer sistemler için Toplamsallık özelliği kullanılarak çıkış ifadesi $H(z)$ elde edilir.

Önce **$H_1(s) = 0$ ve $R(s) \neq 0$ için $H_R(z)$** elde edilir. Bu şartlar için blok diyagram aşağıda verilmiştir.

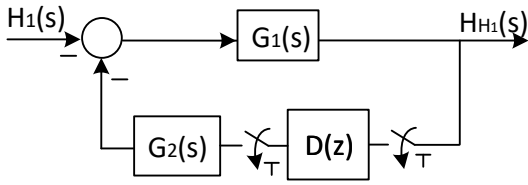


Şekilde verilen blok diyagramdan $R(z)$ giriş için çıkış;

$$H_R(z) = \frac{D(z)G_1G_2(z)}{1 + D(z)G_1G_2(z)} R(z)$$

elde edilir.

Sonra, $H_1(s) \neq 0$ ve $R(s) = 0$ için $H_{H_1}(z)$ elde edilir. Bu şartlar için blok diyagram aşağıda verilmiştir.

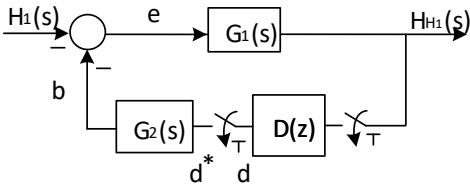


Şekilde verilen blok diyagramdan $H_1(z)$ giriş için çıkış;

$$H_{H_1}(z) = -\frac{G_1 H_1(z)}{1 + D(z) G_1 G_2(z)}$$

elde edilir. **Dikkat G_1 ve $H_1(s)$** kaynaşmış

NOT: EK-BİLGİ (Sınavda aşağıda verilen işlemleri yapmadan yukarıda verildiği gibi sonucu doğrudan yazabilirsiniz.)



$$e = H_1(s) - G_2(s)d^* \\ d = D^*(s)H_{H_1}^*(s) \rightarrow d^* = D^*(s)H_{H_1}^*(s) \\ H_{H_1}(s) = eG_1(s) \rightarrow H_{H_1}(s) = \underbrace{(H_1(s) - G_2(s)d^*)}_{e} G_1(s)$$

$$H_{H_1}(s) = H_1(s)G_1(s) - G_2(s)G_1(s)d^* \\ H_{H_1}^*(s) = H_1G_1^*(s) - G_1G_2^*(s)d^* \\ H_{H_1}^*(s) = H_1G_1^*(s) - G_1G_2^*(s)\underbrace{\{D^*(s)H_{H_1}^*(s)\}}_{d^*}$$

$$H_{H_1}^*(s) = H_1G_1^*(s) - G_1G_2^*(s)D^*(s)H_{H_1}^*(s) \\ H_{H_1}^*(s)\{1 + G_1G_2^*(s)D^*(s)\} = H_1G_1^*(s)$$

$$H_{H_1}(s) = \frac{H_1G_1^*(s)}{1 + G_1G_2^*(s)D^*(s)}$$

$$H_{H_1}^*(z) = \frac{H_1G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)D(z)}$$

$R(s) \neq 0$ ve $H_1(s) \neq 0$ için çıkış ise her iki çıkışın toplamıdır.

$$H(z) = H_R(z) + H_{H_1}(z) \rightarrow H(z) = \frac{D(z)G_1G_2(z)}{1+D(z)G_1G_2(z)} R(z) - \frac{G_1H_1(z)}{1+D(z)G_1G_2(z)}$$

olarak elde edilir.

b) Elde edilen $H(z)$ cevabı $D(z)$ kontrolör parantezine alınır ise,

$$H(z) = \frac{\frac{D(z)G_1G_2(z)}{D(z)}}{\frac{1}{D(z)} + G_1G_2(z)} R(z) - \frac{\frac{G_1H_1(z)}{D(z)}}{\frac{1}{D(z)} + G_1G_2(z)}$$

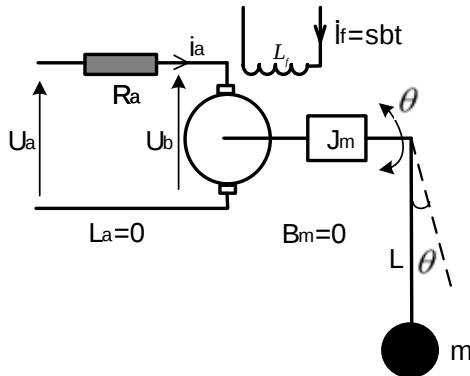
$D(z) = \infty$ alınıp düzenlenir ise,

$$H(z) = \frac{\frac{G_1G_2(z)}{\frac{1}{\infty}}}{\frac{1}{\infty} + G_1G_2(z)} R(z) - \frac{\frac{G_1H_1(z)}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + G_1G_2(z)}$$

$$H(z) = \frac{\frac{G_1G_2(z)}{0 + G_1G_2(z)}}{1} R(z) - \frac{0}{0 + G_1G_2(z)}$$

$H(z)$ ifadesinden görüleceği üzere $D(z) = \infty$ için $H(z) = R(z)$ olur.

C.4) a) Sistemi tanımlayan denklemlerin t-domeninde yazılması ve durum denklemlerini elde edilmesi aşağıda verilmiştir.



$$1-U_a(t) = Ri_a(t) + U_b(t) \rightarrow i_a(t) = \frac{u_a(t)-U_b(t)}{R}$$

$$2-U_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$3 \cdot T_e(t) = K_i i_a(t) \quad \rightarrow \quad T_e(t) = K_i \frac{u_a(t) - U_b(t)}{R}$$

$$4T_m(t) = J_m \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + T_1(t)$$

5- $T_1(t) = mgL\sin\theta(t)$ motor miline m kütlesinden dolayı etki eden yük momenti (**şekil aşağıda**).

$$6 \cdot T_m(t) = T_e(t)$$



m Kütlesi DC motor tarafından $\theta(t)$ açısı kadar konum değiştirilmek istendiğinde DC motor miline etki eden döndürme kuvveti şekilden $T_1(t) = mgL\sin\theta(t)$ dir.

$T_m(t) = J_m \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + mgL \sin \theta(t)$ elde edilir. $T_m(t) = T_e(t)$ eşitliğinde $U_b(t)$ ifadesi yerine koyulur ve düzenlenir ise,

$$J_m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgL \sin\theta(t) = K_i \frac{u_a(t) - K_b \frac{d\theta(t)}{dt}}{R}$$

ara işlemlerden sonra,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{K_b K_i}{J_m R} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{mgL}{J_m} \sin\theta(t) = \frac{K_i}{J_m R} u_a(t)$$

sistemi tanımlayan diferansiyel denklem elde edilir.

Durum değişkenleri tanımlanır;

$$\theta(t) = x_1(t) \quad \text{olsun.}$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = x_2(t) \quad \text{denir ise}$$

$$f_1 = \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad \text{I.durum denklemleri yazılır.}$$

$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt}$ olur. sistemi tanımlayan diferansiyel denklem

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{K_b K_i}{J_m R} \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{mgL}{J_m} \sin\theta(t) + \frac{K_i}{J_m R} u_a(t)$$

Olarak düzenlenir ve tanımlanan durum değişkenleri yerlerine koyulur ise,

$$\mathbf{f}_2 = \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{K_b K_i}{J_m R} x_2(t) - \frac{mgL}{J_m} \sin x_1(t) + \frac{K_i}{J_m R} u_a(t) \quad \text{II.durum denklemleri elde edilir.}$$

Matrisel formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{K_b K_i}{J_m R} x_2(t) - \frac{mgL}{J_m} \sin x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_i}{J_m R} \end{bmatrix} u_a(t)$$

b) $\frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \mathbf{A}^* \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^* \Delta \mathbf{u}(t)$ formda yazmak için öncelikle $\mathbf{A}^*$ ve $\mathbf{B}^*$ matrisleri elde edilmelidir. ($\theta = x_{10} = 0$)

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2(t)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}_{x_{10}, x_{20}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL \cos x_{10}}{J_m} & -\frac{K_b K_i}{J_m R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{J_m} & -\frac{K_b K_i}{J_m R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_a(t)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_a(t)} \end{bmatrix}_{x_{10}, x_{20}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_i}{J_m R} \end{bmatrix}$$

$\frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \mathbf{A}^* \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^* \Delta \mathbf{u}(t)$ Vektör matris formatında aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{\Delta x_2(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{J_m} & -\frac{K_b K_i}{J_m R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_i}{J_m R} \end{bmatrix} \Delta u_a(t)$$