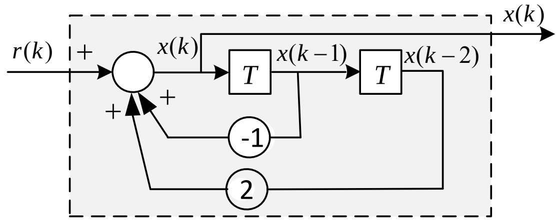
28.03.2017

OTOMATİK KONTROL VİZE SINAVI

S-1



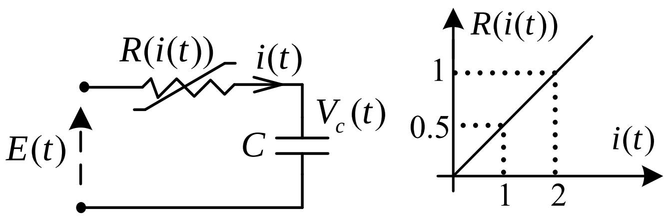
Şekilde ayrık-zaman ikinci dereceden bir sisteme ait fark denklemi için akış diyagramı verilmiştir.

a) $x(k)$ Fark denklemini yazınız. (5)

b) $x(k)$ Fark denklemini çözünüz. (5)

c) Giriş $r(t)=e^{-t}\boldsymbol{u(t)}$, örnekleme zamanı $\boldsymbol{T}=1\boldsymbol{sn}$ olmak üzere $\boldsymbol{k}=10$ örnek içi $x(10)$ değerini hesap ediniz.(15), 13+2

S-2

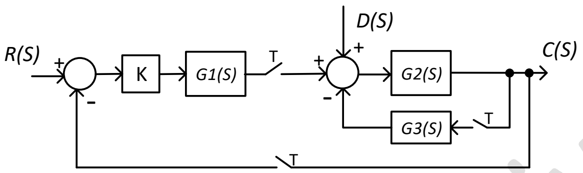


Yanda verilen R-C devresinde lineer olmayan **R** direncinin **i(t)** akıma göre değişimi verilmiştir. Sistemin,

a) R-C devresine ait t-domeni lineer olmayan dinamik denklemi yazınız. (10)

b) $\boldsymbol{V_c(t)}=\boldsymbol{V_0}$ ve $\boldsymbol{E(t)}=\boldsymbol{E_0}$ çalışma noktası doğrusallaştırınız. Sistemin durum denklemlerini vektör matris formu ; $\frac{\Delta \boldsymbol{x(t)}}{\Delta \boldsymbol{t}}=\boldsymbol{A}*\Delta \boldsymbol{x(t)}+\boldsymbol{B}*\Delta \boldsymbol{u(t)}$ için yazınız. (15)

S-3



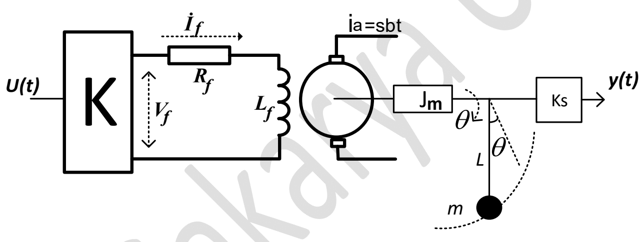
$R(s)=0$ ve $D(s)\neq 0$ için,

a) Bozucu giriş $D(s)$ için eşdeğer kontrol blok diyagramını çiziniz.(5)

b) Bozucu giriş $D(z)$ için çıkış cevabı $C(z)$ elde ediniz.(10)

c) $\frac{C(Z)}{D(Z)}$ elde ediniz. $G_1(s)=\frac{1}{s+1}$, $G_2(s)=\frac{1}{s+2}$, $G_3(s)=10$ ve $D(t)=u(t)$ için $c(\infty)\leq 0.8$ olabilmesi için K'yı hesaplayınız.T=1 sn.(10)

S-4



Şekilde verilen kontrol sisteminde motor miline L uzunluğunda esnek olmayan bir bağlantı ile sabitlenmiş kütle, θ açısı ile sağa-sola döndürülmektedir. Sarkaç sisteminin motorda oluşturduğu yük momenti doğrusallaştırılmıştır $T=mgL\theta$ ve konumu ölçme düzeneği $Ks=1\frac{volt}{rad}$ olarak verilmiştir. (B=0, Jm motor ateleti ve mgL=1)

a) Sistemi tanımlayan denklemleri t ve s domeninde yazınız. Blok diyagramını çiziniz.(10+5)

b) D(z) ayrık zaman sayısal kontrolcü olmak üzere sisteme ait kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.(10)

Formüller

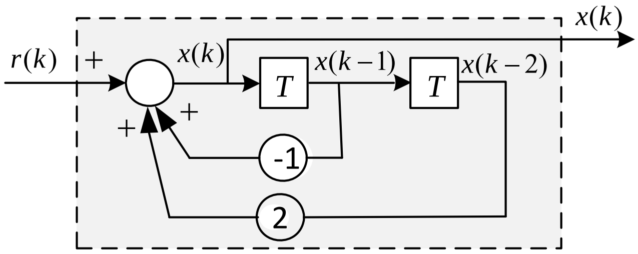
$$x(k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i}$$

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=s_i}\right\}$$

Başarılar, Süre 90 dak.

Prof. Dr. Ayhan ÖZDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Burhan Baraklı

1) a)



$x(k)$ fark denklemine ait verilmiş olan diyagramdan $x(k)$ fark denklemi,

$x(k) = r(k) - x(k-1) + 2x(k-2)$ olarak yazılır.

b) Fark denkleminin çözümü için önce $x(k)$ nın z-dönüşümü bulunacak sonra ters-z dönüşümü alınarak $x(k)$ nın çözümü elde edilecektir. Elde edilmiş olan fark denklemi kullanılarak,

$X(z) = R(z) - z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z)$ yazılır

$X(z)(1 + z^{-1} - 2z^{-2}) = R(z)$ ve düzenlenir ise,

$X(z) = \frac{R(z)}{(1+z^{-1}-2z^{-2})} = \frac{z^2R(z)}{z^2+z-2} = \frac{z^2R(z)}{(z-1)(z+2)}$ elde edilir.

c) $r(t) = e^{-t}u(t)$ giriş için $R(z) = Z\{r(t)\} = Z\{e^{-t}\} = \frac{z}{z-e^{-T}}$

$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2)}\frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z^3}{(z-1)(z+2)(z-e^{-T})}$ olur.

T=1sn için

$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2)}\frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z^3}{(z-1)(z+2)(z-0.3679)}$ elde edilir.

$X(z)$ ifadesinin ters z- dönüşümü alınır.

$$x(k) = \cancel{(z-1)}\frac{z^3}{\cancel{(z-1)}(z+2)(z-0.3679)}z^{k-1}\bigg|_{z=1} + \cancel{(z+2)}\frac{z^3}{(z-1)\cancel{(z+2)}(z-0.3679)}z^{k-1}\bigg|_{z=2} + \cancel{(z-0.3679)}\frac{z^3}{(z-1)(z+2)\cancel{(z-0.3679)}}z^{k-1}\bigg|_{z=0.3679}$$

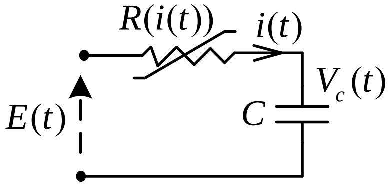
$$x(k) = \frac{1^2}{(1+2)(1-0.3679)}1^k + \frac{-2^2}{(-2-1)(-2-0.3679)}(-2)^k + \frac{0.3679^2}{(0.3679-1)(0.3679+2)}0.3679^k$$

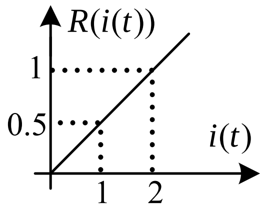
$$x(k) = \frac{1}{3*0.6321}1^k + \frac{4}{-3*-2.3679}(-2)^k + \frac{(0.3679)^2}{-0.6321*2.3679}(0.3679)^k$$

$x(k) = 0.5273 + 0.5631(-2)^k - 0.0904*(0.3679)^k$ fark denklem çözümü elde edilir. (13)

$k = 10$ için $x(10) = 0.5273 + 576.6144 - 4.106*10^{-6}$ ve $x(10) = 577.1417$ olur.(2)

2) a)





$E(t) = R\big(i(t)\big)i(t) + V_c(t)$

$k = 0.5$ için $R\big(i(t)\big) = ki(t)$

$V_c(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt \quad \rightarrow \; i(t) = c\,\frac{dV_c(t)}{dt}$ dir.

$E(t)$ denkleminde $i(t)$ akım ifadesi yerine koyulur.

$E(t) = k\, i(t)\, i(t) + V_c(t) = k\, i(t)^2 + V_c(t)$

$$E(t) = k\, C^2 \left(\frac{dV_c(t)}{dt}\right)^2 + V_c(t)$$

$$\frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{\sqrt{E(t)-V_c(t)}}{C\sqrt{k}} \qquad (10)$$

Dikkat: $\left(\frac{dV_c(t)}{dt}\right)^2$ türev ifadesinin karesidir. Yani $\left(\frac{dV_c(t)}{dt}\right)\left(\frac{dV_c(t)}{dt}\right)$'dir. RC devresine ait matematiksel model 1. Dereceden lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir.

b) Bir adet durum değişkeni vardır $V_c(t)$ ve

$x_1(t) = V_c(t)$ olsun.

durum denklemi,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{\sqrt{E(t)-x_1(t)}}{C\sqrt{k}}$$ olur.

Bu sistem $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$ şeklinde yazılamaz. Çünkü bu denklem karekök ifadesi nedeni ile non-lineerdir. Sistemin $x_{01}(t) = V_0$ ve $E_0(t) = E_0$ nokta civarında lineer modeli elde edilecektir.

$$f_1 = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{\sqrt{E(t) - x_1(t)}}{C\sqrt{k}}$$

Sırasıyla A^* ve B^* matrisleri elde edilecektir. Grafikten $k = 2$ dir.

$$A^* = \left[\frac{df_1}{dx_1}\right]_{x_{01},E_0} = \frac{1}{2C\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{E(t) - x_1(t)}}\right)_{x_1=V_0,E=E_0} = -\frac{1}{2C\sqrt{2}\sqrt{E_0 - V_0}}$$

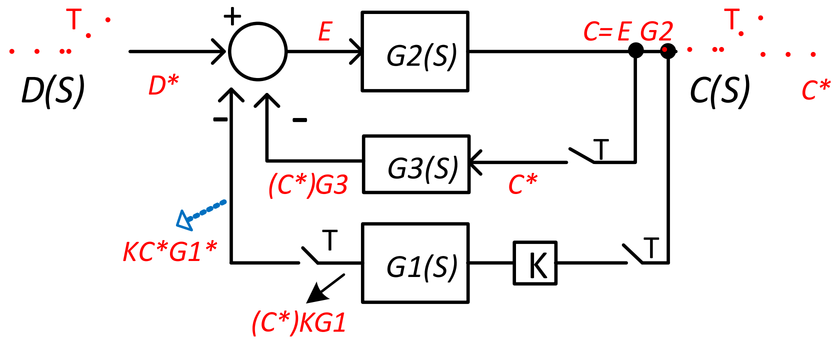
$$B^* = \left[\frac{df_1}{dE}\right]_{E=E_0} = \frac{1}{2C\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E(t) - x_1(t)}}\right)_{x_1=V_0,E=E_0} = \frac{1}{2C\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{E_0 - V_0}}$$

A^* ve B^* matrisleri kullanılarak lineerleştirilmiş denklem vektör matris formunda,

$$\frac{d\Delta x(t)}{\Delta t} = A^{*}\Delta x(t) + B^{*}u(t) \rightarrow \left[\frac{d\Delta x_1(t)}{d\Delta t}\right] = \left[-\frac{1}{2C\sqrt{2}\sqrt{E_0-V_0}}\right]\Delta x_1(t) + \left[\frac{1}{2C\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{E_0-V_0}}\right]\Delta E(t)$$

Not: $\Delta x_1(t) = x_1(t) - V_0$ ve $\Delta E(t) = E(t) - E_0$ dır.

3) a) $R(s) = 0$ ve $D(s) \neq 0$ için kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



b) Yukarıdaki kontrol blok diyagramından, girişin ayrık ifadesinden, E hatası ve çıkış ifadesi,

$E = D^{*} - (KC^{*})G_1^{*} - (C^{*})G_3$ ve $C = EG_2$ dir.

Çıkış ifadesinde E hatası yerine yazılarak çıkış ifadesi düzenlenirse

$$C = (D^{*} - KC^{*}G_1^{*} - C^{*}G_3)G_2$$

$$C = D^{*}G_2 - KC^{*}G_1^{*}G_2 - C^{*}G_3G_2$$

G_3 ve G_2 çarpım halindedir. Çıkış örneklendiğinde, G_3G_2 çarpımı örneklenecek ve yine çarpımın z-dönüşümü alınacaktır. için çıkış ifadesinin ayrık zaman ifadesi

$$C^{*} = D^{*}G_2^{*} - KC^{*}G_1^{*}G_2^{*} - C^{*}(G_3G_2)^{*}$$

$$C(z) = D(z)G_2(Z) - KC(z)G_1(z)G_2(z) - C(z)G_{32}(z)$$

$C(z) = \frac{D(z)G_2(Z)}{1+KG_1(z)G_2(z)+G_{32}(z)}$ ayrık zaman transfer fonksiyonu,

$\frac{C(z)}{D(z)} = \frac{G_2(Z)}{1+KG_1(z)G_2(z)+G_{32}(z)}$ olarak elde edilir.

c) **T=1 sn için,**

$D(z) = Z\{u(t)\} = Z\{\frac{1}{s}\}$ ise $D(z) = \frac{z}{z-1}$ dir.

$$G_2(Z) = Z\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \left(s-(-2)\right)\frac{1}{s+2}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-2} = \frac{z}{z-e^{-2T}} = \frac{z}{z-e^{-2T}} = \frac{z}{z-0.1353}$$

$$G_1(Z) = Z\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \left(s-(-1)\right)\frac{1}{s+1}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-1} = \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z}{z-0.3679}$$

$$G_{32}(Z) = Z\left\{10\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{10z}{z-0.1353}$$

$C(z)$ ifadesi,

$$C(z)=\frac{\frac{z}{z-1}\quad\frac{z}{z-0.1353}}{1+K\frac{z}{z-0.3679}\;\frac{z}{z-0.1353}+\frac{10z}{z-0.1353}}$$

$$C(z)=\frac{\frac{z}{z-1}\quad\frac{z}{z-0.1353}}{\frac{(z-0.3679)(z-0.1353)}{(z-0.3679)(z-0.1353)}+\frac{Kz^2}{(z-0.3679)(z-0.1353)}+\frac{10z\,(z-0.3679)}{(z-0.1353)(z-0.3679)}}$$

$$C(z)=\frac{\frac{z^2}{(z-1)(z-0.1353)}}{\frac{z^2-0.5302z+0.0498}{(z-0.3679)(z-0.1353)}+\frac{Kz^2}{(z-0.3679)(z-0.1353)}+\frac{10z^2\;-3.679z}{(z-0.1353)(z-0.3679)}}$$

$$C(z)=\frac{\frac{z^2}{(z-1)(z-0.1353)}}{\frac{(11+K)z^2-3.8981z+0.0498}{(z-0.3679)(z-0.1353)}}=\frac{\frac{z^2}{(z-1)\cancel{(z-0.1353)}}}{\frac{(11+K)z^2-3.8981z+0.0498}{(z-0.3679)\cancel{(z-0.1353)}}}$$

$$C(z)=\frac{z^2(z-0.3679)}{(z-1)((11+K)z^2-3.8981z+0.0498)}=\frac{z^3-0.3679z^2}{(z-1)((11+K)z^2-3.8981z+0.0498)}$$

Elde edilir.

$$C_D(\infty)=\lim_{t\to\infty}C_D(t)=\lim_{z\to1}(z-1)C_D(z)=\lim_{z\to1}\cancel{(z-1)}\frac{z^3-0.3679z^2}{\cancel{(z-1)}((11+K)z^2-3.8981z+0.0498)}$$

$$=\frac{1-0.3679}{(11+K)-3.8981+0.04980}\quad\rightarrow\quad C_D(\infty)=\frac{0.6321}{(11+K)-3.8483}$$

$C_D(\infty)\leq 0.8$ olması istenmektedir.

$$\frac{0.6321}{(11+K)-3.8483}\leq 0.8$$

$0.6321\ \leq 8.8+0.8K-3.0786$

$-5.0893<K$

4) a)

1. $u_f(t) = Ku(t)$
2. $u_f(t) = R_f I_f(t) + L_f \frac{dI_f(t)}{dt}$
3. $T_e(t) = K_i I_f(t)$
4. $T_m(t) = J\frac{dw(t)}{dt} + T_y(t)$

   $T_y(t) = mgL\theta(t)$
5. $T_e(t) = T_m(t)$
6. $w(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$
7. $y(t) = K_s\theta(t)$

1. $U_f(s) = KU(s)$
2. $U_f(s) = R_f I_f(s) + sL_f I_f(s)$
3. $T_e(s) = K_i I_f(s)$
4. $T_m(s) = sJw(s) + T_y(s)$

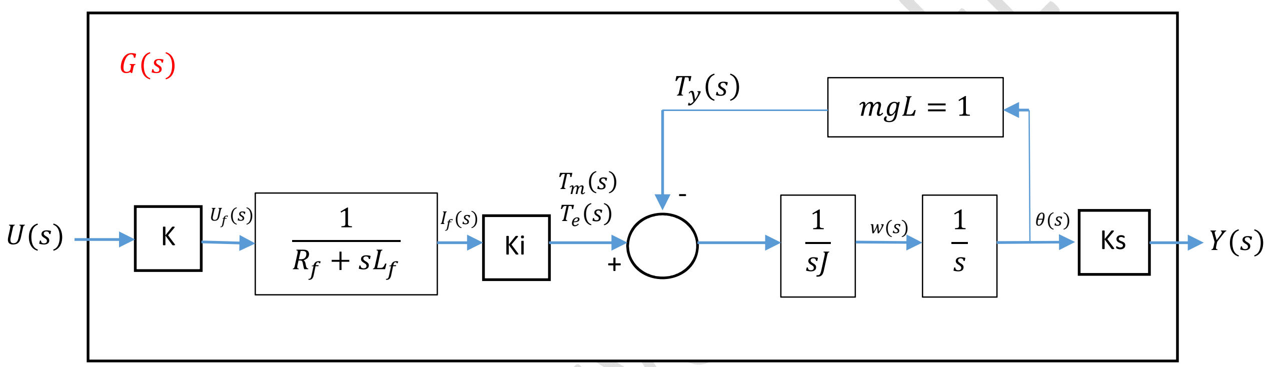
   $T_y(s) = mgL\theta(s)$
5. $T_e(s) = T_m(s)$
6. $w(s) = s\theta(s)$
7. $y(s) = K_s\theta(s)$

$$I_f(s) = \frac{U_f(s)}{R_f + sL_f}$$

$$w(s) = \frac{T_m(s) - T_y(s)}{sJ}$$

$$\theta(s) = \frac{w(s)}{s}$$

G(s) sistem aşağıda çizilmiştir.



b)